

Chapitre 2 : Concepts fondamentaux des graphes

2.1 Définitions de base

Un graphe est une structure mathématique permettant de modéliser un ensemble d'éléments et les relations entre eux. Il est défini par deux ensembles principaux :

- Les sommets (ou nœuds), qui représentent les entités (personnes, lieux, objets, etc.).
- Les arêtes (ou liens), qui représentent les relations entre ces entités. Une arête connecte deux nœuds.

Définition formelle :

Un graphe G est un couple $G = (V, E)$, où :

- V est l'ensemble des sommets (nœuds),
- E est l'ensemble des arêtes (liens) reliant des paires de sommets.

Exemple : Dans un réseau social, chaque personne est un sommet, et une arête peut représenter une relation d'amitié entre deux personnes.

2.2 Graphes dirigés et non dirigés

Les graphes peuvent être classés en deux grandes catégories selon la nature des relations qu'ils modélisent :

Graphe non dirigé

Dans un graphe non dirigé, les arêtes n'ont pas de direction. Cela signifie que si une arête relie les sommets u et v , alors la relation est symétrique : u est en relation avec v , et réciproquement.

Exemple : Un graphe non dirigé peut modéliser un réseau d'amis. Si Alice et Bob sont amis, cette relation est mutuelle, donc il n'y a pas de direction particulière.

$$u \longleftrightarrow v \quad (1)$$

Graphe dirigé :

Dans un graphe dirigé, les arêtes ont une direction. Une arête allant de u vers v signifie qu'il y a une relation de u vers v , mais pas nécessairement dans l'autre sens. C'est utile pour modéliser des relations asymétriques.

Exemple : Sur Twitter, si Alice suit Bob, cela ne signifie pas nécessairement que Bob suit Alice en retour. La relation est donc dirigée de Alice vers Bob.

$$u \longrightarrow v \quad (2)$$

Application sociologique :

- Un graphe non dirigé peut modéliser les réseaux d'amitié ou de collaboration.
 - Un graphe dirigé peut représenter les relations de pouvoir ou d'influence dans un groupe (qui suit qui, qui influence qui).
-

2.3 Graphes pondérés et non pondérés

Un graphe peut également être pondéré, ce qui signifie que chaque arête est associée à un poids. Ce poids peut représenter la force de la relation entre deux nœuds.

Graphe non pondéré :

Un graphe non pondéré attribue une valeur égale à toutes les arêtes. C'est la représentation la plus simple, où la présence d'une arête signifie simplement qu'il y a une relation entre deux nœuds, sans indication de son intensité.

Graphe pondéré :

Dans un graphe pondéré, chaque arête est associée à une valeur numérique qui peut représenter :

- La fréquence des interactions (par exemple, combien de fois deux individus ont interagis).

- La force de la relation (par exemple, la force d'une amitié ou d'une collaboration).

$$u \xrightarrow{w} v \quad (3)$$

Où w est le poids de l'arête reliant u et v .

Application sociologique :

Un graphe pondéré peut modéliser des interactions sociales en intégrant la fréquence des interactions (par exemple, combien de fois deux individus ont communiqué) ou la proximité sociale entre des individus. Par exemple, dans une enquête sociologique, il est possible de pondérer les relations selon la fréquence de communication entre individus dans un groupe.

2.4 Concepts clés : degré, chemins et cycles

Pour analyser un graphe, il est important de comprendre plusieurs concepts fondamentaux :

Degré d'un sommet :

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont connectées.

- Degré entrant : Le nombre d'arêtes qui arrivent vers le sommet (dans un graphe dirigé).
- Degré sortant : Le nombre d'arêtes qui partent du sommet (dans un graphe dirigé).

Exemple : Dans un réseau social, le degré d'un utilisateur correspond au nombre de connexions qu'il a (combien de personnes sont ses amis ou ses followers).

Chemin :

Un chemin dans un graphe est une suite de sommets reliés par des arêtes. Il peut représenter une chaîne de relations entre des individus.

Exemple : Dans un réseau social, un chemin peut représenter la distance sociale entre deux individus (combien de relations directes ou indirectes les séparent).

Cycle :

Un cycle est un chemin qui revient à son point de départ. Dans une analyse de réseaux sociaux, un cycle peut représenter des boucles de rétroaction ou des groupes fermés d'interaction.

Application sociologique :

Ces concepts sont essentiels pour comprendre des phénomènes tels que :

- Centralité : Qui est le plus connecté dans un réseau ?
- Distance sociale : Combien d'intermédiaires séparent deux individus dans un groupe ?
- Communautés fermées : Quels individus forment des groupes qui interagissent exclusivement entre eux ?

2.5 Modélisation des graphes dans des exemples sociologiques

Il est important de comprendre que ces concepts ne sont pas purement théoriques. Ils sont utilisés de manière pratique pour modéliser des relations complexes dans des contextes sociologiques.

Exemple : Réseau de collaborations scientifiques

Imaginons que nous voulions modéliser un réseau de collaborations entre chercheurs dans un domaine donné :

- Chaque chercheur est un nœud.
- Une arête relie deux chercheurs s'ils ont coécrit un article ensemble.
- Le degré d'un chercheur mesure combien de collaborateurs il possède.
- Un chemin entre deux chercheurs montre combien de collaborations les séparent (peut-être en passant par des collègues communs).

Dans ce réseau, des chercheurs avec un degré élevé peuvent être vus comme des acteurs centraux dans la diffusion des idées ou des innovations scientifiques.

Nous avons maintenant une compréhension de base de ce qu'est un graphe et comment il peut être utilisé pour modéliser des relations sociales. Dans le prochain chapitre, nous explorerons des algorithmes spécifiques permettant d'analyser ces graphes, comme les parcours en largeur (BFS) et en profondeur (DFS), qui sont des outils essentiels pour extraire des informations pertinentes à partir de graphes complexes.

Questions pour approfondir :

1. Pouvez-vous identifier dans votre quotidien des situations qui pourraient être modélisées comme des graphes ? (Par exemple, vos interactions avec vos amis, collègues ou réseaux sociaux).
2. Comment ces concepts de degré, chemin et cycle peuvent-ils s'appliquer à l'étude de vos propres réseaux ?

Auteur : Florian Mathieu

Licence CC BY NC



Ce cours est mis à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).